Neue Version meiner Notizen. ⇝ Website

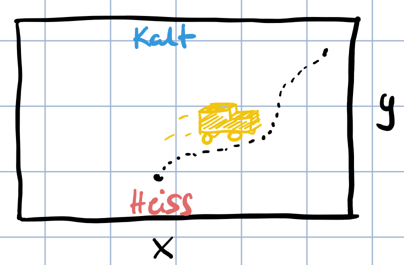
Achtung: Totales Differential (4.2) und die Tangentialebene (4.3) wird vorerst übersprungen... ⇝ nächste Woche

Heute: → Mehrdimensionale Kettenregel.
→ Gradient und seine geometrische Interpretation
→ Richtungsableitungen

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x(t), y(t), t)$

Was ist $\frac{df}{dt}$?

Zum Beispiel: f ist die Temperatur abhängig vom Ort auf der Landkarte.



Dann ändert sich die Temperatur mit der Tageszeit (Mittags am heissesten)

und mit dem Ort (im Süden am heissesten).

Es gilt: $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Wie ändert sich die Temperatur ost-west

Wie ändert sich das Auto ost-west

Wie ändert sich die Temperatur mit der Tageszeit am fixen Ort.

Weitere Beispiele und Aufgaben in den Notizen...

(Zusammenhang mit dem totalen Differential folgt nächste Woche...)

Gradient:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist

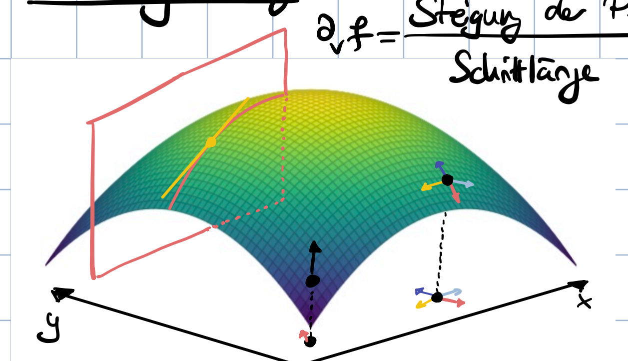
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$ der Gradient.

Natürliche Frage:

Der Gradient ist ein Vektor, der die partiellen Ableitungen enthält. Was hat er mit der Steigung von f zu tun?

Richtungsableitung

$$\partial_v f = \frac{\text{Steigung der Pfeile}}{\text{Schrittlänge}}$$



Geometrisch: Schnitt von dem Flächengraphen mit der Ebene ⟹ eindimensionaler Graph entlang dem man ableitet.

Definition: $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ normiert also $\|v\| = 1$. $\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1\right)$

$$\partial_v f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_x, y_0 + hv_y) - f(x_0, y_0)}{h}$$ (Differentialquotient)

Mithilfe der Kettenregel (siehe Notizen 4.19)

$$\partial_v f(x,y) = \frac{1}{\|v\|} \langle \nabla f(x,y), v \rangle$$

nur wenn v nicht normiert.

$$\left(= \left\langle \nabla f(x,y), \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right.$$

Normierung von v.

Auch: $D_v f$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$

$$\left. = \partial_x f(x,y) \cdot \hat{v}_x + \partial_y f(x,y) \cdot \hat{v}_y \right)$$

Änderung in x

Schrittlänge in x

Beispiel 4.20 (Richtungsableitung berechnen)
Wir suchen die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = \cos(x)\sin(y)$$

im Punkt (π, π) in Richtung $\vec{v} = (-1, -3)$.

Zunächst berechnen wir den Gradienten von $f(x, y)$:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin(x)\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) \end{bmatrix}.$$

Einsetzen des Punktes (π, π):

$$\nabla f(\pi, \pi) \begin{bmatrix} -\sin(\pi)\sin(\pi) \\ \cos(\pi)\cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der gegebene Richtungsvektor ist $\vec{v} = (-1, -3)$. Dessen Länge beträgt

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

Damit ist die Richtungsableitung:

$$\partial_{\vec{v}} f(\pi, \pi) = \frac{1}{\sqrt{10}} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Kommt oft auf Serie 3.

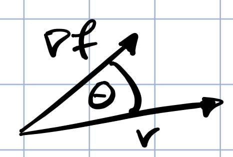
Weitere Aufgaben in Notizen.

In welche Richtung zeigt der Gradient?

Richtungsableitung: $\partial_v f = \langle \nabla f, v \rangle$. $\quad 1 = \|v\|$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$

Welche Richtung v maximiert die Steigung?

$$\max_{\substack{v \in \mathbb{R}^2, \\ \|v\|=1}} \big(\partial_v f(x,y)\big) = \max_{\|v\|=1} \langle \nabla f(x,y), v \rangle = \max_{\|v\|=1} \big(\|\nabla f\| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1} \cdot \cos\theta\big)$$



$\cos\theta$ ist maximal für $\theta = 0$. Also sind ∇f und v parallel!

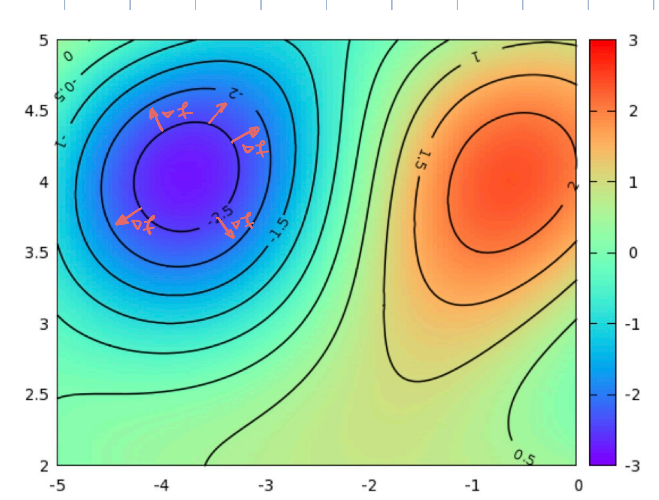
$\Rightarrow$ ∇f zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs!

Niveaulinien: Sei nun $v \perp \nabla f$.

Dann gilt $0 = \langle \nabla f, v \rangle = \partial_v f$.

Also ist die Steigung null und damit f konst. entlang v.

$\Rightarrow$ v zeigt entlang der Niveaulinie.



Beispiel 4.18

$f(u,v) = uv^2 - e^u$.
$u = \sin x$
$v = xy$

$\Rightarrow f(x,y)$ implizit definiert.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}^{0} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (v^2 - e^u)\cos x + 2uv \cdot y = (x^2y^2 - e^{\sin x})\cos x + 2xy^2 \sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2uv \cdot x = 2\sin x \cdot x^2 y$$